

2. Mecanica punctului material

Mișcarea curbilinie

- 2.1. Viteza în mișcarea curbilinie
- 2.2. Accelerația în mișcarea curbilinie
- 2.3. Mișcarea circulară. Legea de mișcare
- 2.4. Viteza unghiulară
- 2.5. Mișcarea circulară uniformă
- 2.6. Legătura între mărimile unghiulare și mărimile liniare în mișcarea circulară uniformă
- 2.7. Accelerația unghiulară
- 2.8. Mișcarea circulară uniform variată
- 2.9. Caracterul vectorial al mărimilor unghiulare

2.1 Viteza în mișcarea curbilinie

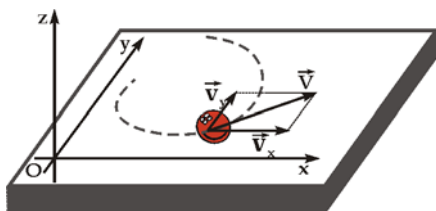
Viteza medie

Să considerăm o mișcare curbilinie plană. În acest caz nu se poate renunța la caracterul vectorial al mărimilor care apar. Fiecare din aceste mărimi va avea componente pe cele două direcții:

$$\Delta \vec{r} = \Delta \vec{r}_x + \Delta \vec{r}_y = \Delta r_x \vec{i} + \Delta r_y \vec{j}, \quad (2.1)$$

de unde viteza medie:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}_x + \Delta \vec{r}_y}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}_x}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{r}_y}{\Delta t} = \frac{\Delta r_x}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta r_y}{\Delta t} \vec{j} = v_{mx} \vec{i} + v_{my} \vec{j}. \quad (2.2)$$



- Orientarea vitezei medii coincide cu orientarea deplasării.
- Modulul vitezei medii se obține pe baza relației:

Fig. 2.1 Mișcarea curbilinie plană.

$$v_m = |\vec{v}_m| = \sqrt{v_{mx}^2 + v_{my}^2}. \quad (2.3)$$

Viteza instantanee

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(\vec{r}_x + \Delta\vec{r}_y)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}_x}{dt} + \frac{d\vec{r}_y}{dt} = \frac{dr_x}{dt} \vec{i} + \frac{dr_y}{dt} \vec{j} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}. \quad (2.4)$$

Orientarea vitezei instantanee coincide cu orientarea deplasării indiferent cât de scurt este intervalul de timp. Viteza instantanee este orientată tangent la traiectorie în orice punct al acesteia.

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \quad (2.5)$$

2.2 Accelerația în mișcarea curbilinie

Considerăm mișcarea unui punct material astfel încât la momentul de timp t_1 are viteza $\vec{v}_1$ iar la momentul de timp t_2 are viteza $\vec{v}_2$.

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1. \quad (2.6)$$

În mișcarea curbilinie viteza variază atât în modul cât și în direcție.

- Variația liniară (sau tangențială) a vitezei $\Delta\vec{v}_t$ reprezintă vectorul care exprimă creșterea modului vitezei în intervalul de timp Δt .
- Variația normală a vitezei $\Delta\vec{v}_n$ reprezintă vectorul care exprimă

variația orientării vitezei în intervalul de timp Δt .

Variația totală a vitezei punctului material este:

$$\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_t + \Delta\vec{v}_n. \quad (2.7)$$

Din ultima relație rezultă accelerația medie ca fiind:

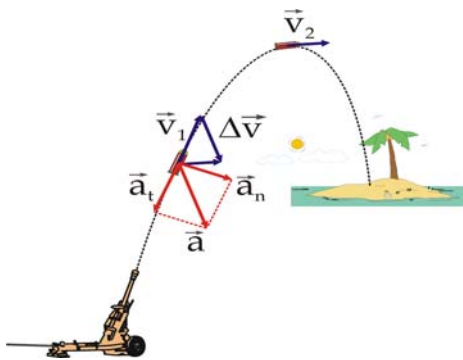


Fig. 2.2 Accelerația normală și accelerația tangențială în mișcarea curbilinie.

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta(\vec{v}_t + \vec{v}_n)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}_t}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{v}_n}{\Delta t} = \vec{a}_{m,t} + \vec{a}_{m,n} . \quad (2.8)$$

De unde **acceleerația instantanee** este:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_t + \vec{a}_n . \quad (2.9)$$

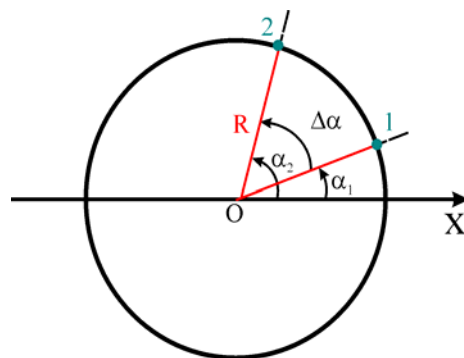
În mișcarea curbilinie variată punctul material suferă două accelerații: 1) accelerația liniară $\vec{a}_t$ care este o măsură a variației în modul a vitezei punctului material și 2) accelerația normală $\vec{a}_n$ care este o măsură a variației orientării punctului material.

2.3 Mișcarea circulară. Legea de mișcare

Mișcarea circulară este o mișcare plană. Mișcarea circulară este foarte importantă în tehnică (piesa cea mai des întâlnită în construcția mașinilor și mecanismelor este roata – sub diferite aspecte). În mișcarea circulară modulul vectorului de poziție al punctului material este constant. Mișcarea circulară poate fi descrisă de o singură variabilă care precizează doar orientarea vectorului de poziție.

Legea de mișcare

Să considerăm un punct material care la timpul t_1 are poziția precizată de unghiul α_1 iar care la timpul t_2 are poziția precizată de unghiul α_2 . Se poate defini o deplasare unghiulară $\Delta\alpha$:



$$\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 . \quad (C2.10)$$

Fig. 2.3 Coordonatele mișcării circulare.

Definiție: Dependența de timp a unghiului α , sau a deplasării unghiulare, reprezintă **legea de mișcare** în mișcarea circulară, și se scrie:

$$\alpha = \alpha(t). \quad (2.11)$$

Dacă Δs reprezintă spațiul parcurs de punctul material iar R este raza cercului pe care acesta se mișcă atunci se poate scrie relația:

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta s}{R}. \quad (2.12)$$

Pentru un unghi oarecare α relația anterioară are forma:

$$\alpha = \frac{s}{R}. \quad (2.13)$$

Dimensiunea unghiului α este:

$$[\alpha] = \frac{[s]}{[R]} = \frac{L}{L} = 1. \quad (2.14)$$

Unitatea de măsură este **radianul**. Un radian este unghiul la centru subîntins de un arc egal cu raza.

2.4 Viteza unghiulară

Definiție: Se numește viteza unghiulară raportul dintre deplasarea unghiulară infimitezimală $d\alpha$, efectuată de către punctul material în intervalul de timp infimitezimal dt și acest interval de timp.

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}. \quad (2.15)$$

Unitatea de măsură a vitezei unghiulare este:

$$[\omega] = \frac{[d\alpha]}{[dt]} = \frac{[\alpha]}{[t]} = \frac{\text{rad}}{\text{s}} = \text{T}^{-1}. \quad (2.16)$$

2.5 Mișcarea circulară uniformă

Definiție: Se numește uniformă acea mișcare circulară în care raza vectoare mătură unghiuri la centru egale, în intervale de timp egale sau punctul material parcurge pe cerc arce în intervale de timp egale.

$$\omega = \frac{\Delta\alpha_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\alpha_2}{\Delta t} = \dots = \frac{\Delta\alpha_n}{\Delta t} = \text{const.} \quad (2.17)$$

În acest caz ecuația deplasării unghiulare se poate obține prin integrare din ecuația (2.15):

$$\begin{aligned} \omega = \frac{d\alpha}{dt} &\Rightarrow d\alpha = \omega \cdot dt \Rightarrow \int_{\alpha_0}^{\alpha(t)} d\alpha = \int_0^t \omega \cdot dt' \\ \alpha(t) - \alpha_0 &= \omega \int_0^t dt' = \omega \cdot t \\ \alpha(t) &= \alpha_0 + \omega \cdot t \end{aligned} \quad (2.18)$$

Dacă la $t = 0$ putem considera că $\alpha_0 = 0$ atunci:

$$\alpha(t) = \omega \cdot t. \quad (2.19)$$

2.6 Legătura între mărimile unghiulare și mărimile liniare în mișcarea circular uniformă.

Viteza tangențială este:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(\alpha \cdot R)}{dt} = R \frac{d(\alpha)}{dt} = R \cdot \omega. \quad (2.20)$$

Deci relația dintre viteza liniară v și viteza unghiulară ω :

$$v = R \cdot \omega. \quad (2.21)$$

În mișcarea circulară uniformă viteza unghiulară ω este constantă astfel rezultă că și viteza liniară este constantă în modul. În același timp orientarea vectorului viteză variază continuu. În mișcarea curbilinie

uniformă accelerația liniară $\vec{a}_t = \vec{a}_t$ este egală cu zero. Accelerația normală, $\vec{a}_n$ în schimb este diferită de zero.

Definiție: Timpul necesar punctului material pentru a efectua o rotație completă se numește perioadă și se notează cu T .

Definiție: Mărimea fizică care arată câte rotații execută punctul material în timp de o secundă se numește frecvență.

Astfel:

$$v = \frac{1}{T} . \quad (2.22)$$

Unitatea de măsură este:

$$[v] = \frac{1}{[T]} = \frac{1}{s} = \text{Hz} . \quad (2.23)$$

În intervalul de timp egal cu o perioadă spațiul parcurs de către un punct material în mișcarea circulară este $2\pi R$; atunci:

$$v = \frac{s}{T} = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi \cdot v \cdot R = \omega \cdot R . \quad (2.24)$$

unde în ultima egalitate s-a folosit ecuația (2.21). De aici rezultă:

$$\omega = 2\pi \cdot v = \frac{2\pi}{T} . \quad (2.25)$$

Accelerația normală în mișcarea uniformă este:

$$\frac{dv_n}{dR} = \frac{v}{R} \Rightarrow dv_n = \frac{v}{R} dR , \quad (2.26)$$

$$a = a_n = \frac{dv_n}{dt} = \frac{v}{R} \frac{dR}{dt} = \frac{v}{R} v , \quad (2.27)$$

de unde:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R . \quad (2.28)$$

În mișcarea circulară uniformă accelerația instantanee este orientată normal la viteza liniară instantanee, după raza cercului de rotație, înspre centrul său.

2.7 Accelerația unghiulară

Definiție: Mișcarea circulară în care viteza unghiulară a punctului material variază în timp se numește mișcare circulară variată sau neuniformă.

Definiție: Accelerația unghiulară este variația vitezei unghiulare într-un interval de timp infinitesimal.

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (2.29)$$

2.8 Mișcarea circulară uniform variată

Definiție: Mișcarea circulară în care accelerația unghiulară este constantă se numește mișcare circulară uniform variată.

$$\begin{aligned} d\omega &= \varepsilon \cdot dt \Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega(t)} d\omega = \int_0^t \varepsilon \cdot dt' \Rightarrow \\ \omega(t) - \omega_0 &= \varepsilon \cdot \int_0^t dt' = \varepsilon \cdot t \Rightarrow \\ \omega(t) &= \omega_0 + \varepsilon \cdot t \end{aligned} \quad (2.30)$$

care reprezintă ecuația vitezei unghiulare în mișcarea circulară uniform variată, cu viteză inițială. Dacă aceasta este egală cu zero atunci:

$$\omega(t) = \varepsilon \cdot t. \quad (2.31)$$

Din ecuația (2.18) avem:

$$\omega(t) = \frac{d\alpha}{dt} \Rightarrow d\alpha = \omega(t) \cdot dt \Rightarrow \int_{\alpha_0}^{\alpha(t)} d\alpha = \int_0^t \omega(t') \cdot dt' \Rightarrow$$

$$\alpha(t) - \alpha_0 = \int_0^t (\omega_0 + \varepsilon \cdot t') dt' = \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2}$$

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2}. \quad (2.33)$$

2.9 Caracterul vectorial al mărimilor unghiulare

Vectorul $\vec{\omega}$ este orientat perpendicular pe planul format de vectorii $\vec{R}$ și $\vec{v}$ iar sensul îi este dat de sensul de orientare a unui burghiu drept care este rotit în sensul în care se rotește pe cerc punctul material studiat.

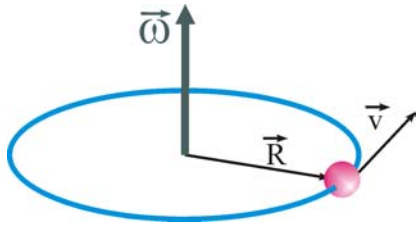


Fig. 2.4 Orientarea relativă a vectorilor în mișcarea circulară.

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}, \quad (2.34)$$

iar:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\alpha}}{dt}, \quad (2.35)$$

și accelerația unghiulară:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (2.36)$$